

Слабая полнота рефлексивного пространства, признак слабой компактности,

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in X$, наз-ся **слабо с-ся** к x , if $X^*(x_n) \rightarrow X^*(x), \forall x^* \in X^*$

$\{x_n\}$ **слабо фундаментален** в X , if $\forall x^* \in X^* \{x^*(x_n)\}$ фундаментален.

X **слабо полное**, if $\forall$ сл. ф-ция - слабо с-ся.

Если $\{x_n\}$ слабо фундаментален, то $\exists M > 0, \|x_n\| \leq M, \forall n$

$X^*(x_n)$ ун-б $\Rightarrow \lim \|x^*(x_n)\| < \infty; x^*(x_n) = Jx_n(x^*)$
 $\lim \|Jx_n\| < \infty \forall x^* \in X^*$ - полное $\Rightarrow$ по т. Банаха-Уилекса
 найдена $\exists M. \|Jx_n\| \leq M, \|Jx_n\| = \|Jx_n\| = \|x_n\| \leq M. \blacksquare$ Ч.Т.Д

If X рефлексивно, то X - слабо полное

Пусть x_n - слабо фундаментален; $\|x^*(x_n) - x^*(x_m)\| \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0 \forall x^* \in X^*$
 Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x^*(x_n) = f(x^*)$ - очевидно, что $f(x^*)$ имеет ун-б X^* ; г-н ограниченность $f(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^*(x_n) = Jx_n(x^*)$, $|f(x^*)| \leq \lim \|Jx_n\| \cdot \|x^*\| \leq M \|x^*\|$, т.к. $\|Jx_n\| \leq \|x_n\| \leq M$ (из пред. т-мы). Значит, $f(x^*) \in X^*$
 $= Jx$. $\exists x \in X, f(x^*) = Jx(x^*) = x^*(x) \Rightarrow x$ - слабый предел $\{x_n\}$. Ч.Т.Д. $\blacksquare$